Les plans d'expériences

Cours pratique pour les BTS et autres

Introduction

Certains phénomènes physiques peuvent être correctement représentés par des modèles mathématiques théoriques selon un certain nombre d'hypothèses préalablement établies.

Il est également possible de déterminer expérimentalement pour une sortie donnée une loi de comportement du phénomène étudié valide dans les domaines des variations choisies des entrées contrôlées

L'expérience (intervention volontaire dans un système pour observer ses effets sur un phénomène) et le plan (organisation dans le but de connaître le comportement du phénomène) permettent d'établir ce que l'on peut appeler un modèle expérimental représentatif du phénomène étudié.

X(entrées, causes, effets) → Phénomène étudié →Y(sorties, effets, réponses)

X1…Xn : facteurs contrôlés, figés ou variables durant les essais

Xn+1…Xr : facteurs non contrôlés, que l'on ne peut pas maîtriser

Xr+1…Xt : facteurs non recensés

L'objectif est de présenter ici la méthode des plans d'expériences

Domaines d'utilisation

Contrairement à d'autres méthodes comme l'AMDEC (validation de la conception de produits ou de procédés) ou le MSP (suivi de production) les plans d'expériences ont des applications dans le domaine industriel tant dans les phases de conception que de production.

Ils sont donc couramment utilisés en développement et recherche, essais, conception de produits ou procédés et leurs fabrications.

Si les plans d'expériences ont trouvé leurs premières applications en agronomie (étude des germinations) ils ont maintenant leurs places à part entière dans les secteurs d'activités industriels, agro-alimentaires, de la biologie ou de la médecine.

Qualité d'un foie gras … programmation informatique optimisée … formulation pharmaceutique … soudage … carte d'asservissement … Fabrication d'un pare-brise automobile … acoustique des engrenages … optimisation des plants de culture … optimisation des paramètres d'une machine-outil ou d'une presse à injecter…

Principe

La démarche expérimentale classique « variation du niveau d'un seul facteur à la fois », en plus d'être longue et couteuse, ne permet pas toujours une approche sûre, fine et rentable du phénomène étudié.

La méthode des plans d'expériences « plusieurs facteurs à des niveaux différents à la fois pour chaque essai selon une procédure programmé » permet :

- Une diminution notable du nombre d'essais
- Une possibilité d'augmenter le nombre de facteurs étudiés ou leurs niveaux
- Une prise en en compte d'éventuelles interactions entre facteurs
- Une recherche d'une recherche optimale
- Une modélisation simple des résultats
- Une bonne précision dans la détermination des résultats

Cette méthode intègre un outil mathématiques statistique qui prendra en compte la variabilité naturelle du phénomène.

Il est important de retenir que le modèle expérimental représentatif du phénomène étudié n'est valide que dans les domaines des variations choisies des facteurs contrôles. Sans vérification préalable l'extrapolation est dangereuse.

Les étapes des plans d'expériences

Les étapes chronologiques de la méthode

01	Formaliser le problème	Objectif
02	Choisir les facteurs, niveaux et interactions	Modèle de base
03	Construire le plan	Choix et affectations
04	Réaliser les essais du plan	Résultats
05	Analyser les résultats	Effets, graphiques, variances
06	Optimiser le réponse	Modèles, conclusion

:

01- Cette étape importante est le fait d'un travail d'équipe qui consiste à recueillir un maximum d'informations concernant le phénomène étudié. Elle s'appuie sur une réflexion de spécialistes ayant une expérience et une connaissance fortes du phénomène. L'équipe détermine l'objectif final, les contraintes de l'étude et l'optimisation à atteindre. Elle utilise généralement à ce stade un diagramme Ishikawa (diagramme cause-effet).

02- Toujours le fait d'une équipe de spécialistes. Il s'agit de définir l's facteurs, leurs niveaux et les interactions retenus. L'expérience permet de sélectionner certains facteurs, de définir les niveaux de variation, d'en figer d'autres, de sélectionner certaines interactions susceptibles d'être influentes sur la réponse.

Conseil : de cette étape délicate dépend de la qualité du résultat final. Si la connaissance du phénomène est limitée, une solution consiste à réaliser un premier plan en prenant en compte un maximum de facteurs à seulement deux niveaux de variation et d'interactions. Après sélection des facteurs et des interactions influents suit la réalisation d'un second plan affiné : choix des facteurs figés, plus de deux niveaux de variation des facteurs variables.

03- C'est une phase plus technique de la méthode. Il s'agit de choisir le plan retenu qui peut être soit factoriel complet, soit factoriel fractionné (tables de Taguchi) et affecter les facteurs et interactions aux colonnes de la table (graphe linéaire associé à la table).

La méthode Taguchi, inventée par Gen'ichi Taguchi, est une méthode statistique pour réaliser des plans d'expériences.

04- La réalisation des essais doit se faire dans des conditions optimales. Les facteurs variables sont bien aux niveaux préconisés, les facteurs figés restent stables, l'environnement de la campagne d'essais est contrôlé autant que possible, la réponse est donnée avec la plus grande précision. L'essai est, si possible, répété et les mesures sont réalisées par une unique personne compétente …

05- Le calcul des moyennes et des effets permet de déterminer les coefficients du modèle matriciel. La représentation graphique et son analyse donnent une interprétation du poids des effets sur la réponse.

Conseil : il est envisageable de terminer l'étude à ce stade en menant notamment une campagne d'essais de validation des résultats mais l'analyse de la variance permet de vérifier si les effets définis comme influents pour la réponse étudiée sont réellement associés au facteur analysé ou s'ils ne sont que les résultats de la variabilité naturelle du phénomène étudié. Elle permet donc une validation statistique des effets.

06- Il est retenu, pour le modèle matriciel final, les effets influents et statistiquement significatifs. Les coefficients retenus du modèle donnent l'extremum recherché pour la réponse.

Les plans factoriels

Plans factoriels complets

Dans un plan factoriel complet toutes les combinaisons d'essais possibles sont représentées. Par définition un plan factoriel complet est orthogonal.

Exemple : 3 facteurs à 2 niveaux pour chacun des facteurs, 2^3= 8 combinaisons possibles

Facteur A	Facteur B	Facteur C
1	1	1
1	1	2
1	2	1
1	2	2
2	1	1
2	1	2
2	2	1
2	2	2

Le plan est orthogonal si tous les facteurs sont orthogonaux 2 à 2, cela signifie qu'à chaque niveau d'un facteur correspond tous les niveaux des autres facteurs le même nombre de fois.

Le même nombre de facteurs à 3 niveaux de variation donnerait 3^3=27 combinaisons possibles dans un plan factoriel complet : on entrevoit rapidement les limites des plans factoriels complets en nombre d'expériences à mener.

Plans factoriels fractionnés

Il n'est pas nécessaire de réaliser tous les essais du plan complet pour estimer le modèle représentatif du phénomène. Le plan factoriel complet est fractionné et chaque fraction est orthogonal.

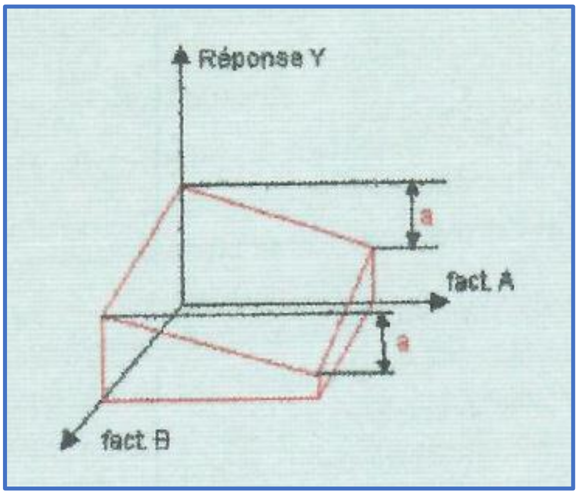
Le choix d'un plan factoriel peut s'avérer délicat. Les tables de Taguchi permettent une construction avisée de ce type de plan notamment en prenant en compte la confusion d'actions entre facteurs et interactions (alias).

Exemple : 7 facteurs à 2 niveaux par facteurs donnent 2^7=128 pour un plan factoriel complet. La table de Taguchi L_8 (2^7) propose un plan fractionné orthogonal à 8 combinaisons.

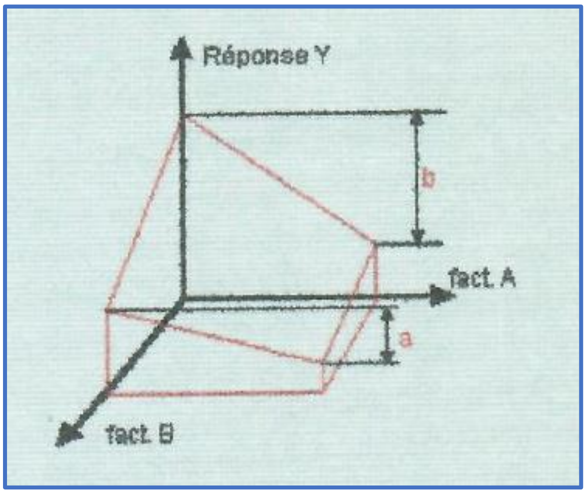
Facteur 1	Facteur 2	Facteur 3	Facteur 4	Facteur 5	Facteur 6	Facteur 7
1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	2	2	2	2
1	2	2	1	1	2	2
1	2	2	2	2	1	1
2	1	2	1	2	1	2
2	1	2	2	1	2	1
2	2	1	1	2	2	1
2	2	1	2	1	1	2

Les interactions

Il y a une interaction lorsque le niveau d'un facteur influe sur l'effet d'un autre. Dans le cas contraire il n'y a pas d'interaction.



Pas d'interaction entre les facteurs A et B



Interaction entre les facteurs A et B

Les interactions sont dites double (facteur A et facteur B), triple (facteur A, facteur B et facteur C). En l'absence d'une méthode les interactions sont des phénomènes difficiles à interpréter. Ainsi aux tables de Taguchi sont associés des graphes linéaires qui permettent une prise en compte programmée des interactions.

Les alias

Par exemple si le facteur A est aliassé à l'interaction BC cela signifie que les effets du facteur A calculés seront confondus avec les effets de l'interaction BC. En fait dans ce cas-là on ne calcule pas les effets du seul facteur A mais les effets du facteur A plus ceux de l'interaction BC.

Un plan factoriel fractionné présente donc un délai de réalisation moins long et un coût moins élevé mais des ambigüités peuvent exister dans les calculs concernant certains facteurs. Les tables de Taguchi et leurs graphes linéaires associés évitent le phénomène des effets aliassés.

Les tables de Taguchi

Les tables de Taguchi sont des plans factoriels fractionnés orthogonaux aux quels sont associés des graphes linéaires qui permettent d'éviter des effets significatifs aliassés.

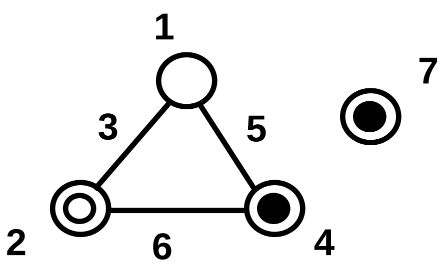
Chaque table de Taguchi sera repérée par une inscription de la forme : L_Z (X^Y)

- Z est le nombre de lignes de la table donc le nombre d'expériences à mener
- X est le nombre de niveaux retenus pour les facteurs
- Y est le nombre de facteurs retenus pour l'étude
- XY est le nombre d'expériences du plan factoriel qui correspond à la table

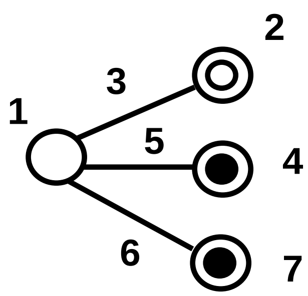
Exemple : L_8 (2^7) indique un plan factoriel fractionnaire de 8 expériences pour 7 facteurs à 2 niveaux par facteur soit 128 expériences si le plan avait été complet.

Facteur 1	Facteur 2	Facteur 3	Facteur 4	Facteur 5	Facteur 6	Facteur 7
1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	2	2	2	2
1	2	2	1	1	2	2
1	2	2	2	2	1	1
2	1	2	1	2	1	2
2	1	2	2	1	2	1
2	2	1	1	2	2	1
2	2	1	2	1	1	2

A cette table sont associés des graphes linéaires :



Graphe 1



Graphe 2

a) Les cercles indiquent à la fois les facteurs classés en groupe selon qu'ils sont plus ou moins difficiles à modifier durant la campagne d'essais et représentent les colonnes de la table, ici de 1 à 7 :
   - Cercle vide : facteur le plus difficile à modifier
   - Cercles concentriques vides : un peu plus facile à modifier
   - Cercles concentriques dont un noir : encore un peu plus facile à modifier
   - Cercle noir : facteur le plus facile à modifier

b) Les traits indiquent les interactions entre les facteurs.

c) Plusieurs utilisations des graphes linéaires sont possibles, par exemple dans le cas du graphe 1 les 3 cas présentés sont des possibilités, d'autres possibilités existent aussi :

- Cas 1 : l'équipe estime qu'aucune interaction n'est influente, la table est utilisable pour 7 facteurs indépendants ou moins
- Cas 2 : l'équipe estime que 4 facteurs et 3 interactions sont influents et les interactions autour du facteur D sont supposées inexistantes
- Cas 3 : l'équipe estime que 3 facteurs et une interaction sont influents et dans cas seulement un sous-ensemble du graphe est utilisé…

Cas	**Col 1**	**Col 2**	**Col 3**	**Col 4**	**Col 5**	**Col 6**	**Col 7**
1	Fact A	Fact B	Fact C	Fact D	Fact E	Fact F	Fact G
2	Fact A	Fact B	Int AB	Fact C	Int AC	Int BC	Fact D
3	Fact A	Fact B		Fact C	Int AC		

Les résidus

Le résidu est un effet résultant de certaines causes non identifiées et considérées comme des perturbations aléatoires qui suivent une loi de Laplace-Gauss.

La réponse à une configuration des facteurs contrôlés n'est donc pas unique mais répartie autour d'une valeur moyenne. En fait le résidu représente le poids des facteurs non contrôlés et des facteurs non recensés.

Ce résidu serait la différence entre une réponse mesurée et une réponse calculée.

Le choix du plan d'expériences

Le choix du plan factoriel fractionné doit répondre à deux règles :

- La règle de l'orthogonalité
- La règle des degrés de liberté (ddl)

Si le plan est choisi parmi les tables de Taguchi il est forcément orthogonal, reste donc à appliquer la règle des ddl.

<u>Exemple</u> : supposons une configuration d'essais à 4 facteurs à 2 niveaux (A, B, C, D) et trois interactions (AB, AC et BC).

Le ddl d'un facteur étant égal au nombre de niveaux du facteur -1 et le ddl d'une interaction étant égal au produit des ddl des facteurs qui la composent, nous avons dans le cas de cet exemple :

$Y_{\text{calculé}}$ = Moyenne Générale + A + B + C + D + AB + AC + BC
$\text{ddl}_{\text{modèle étudié}}$ = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1x1 + 1x1 + 1x1 = 8 ddl

Le ddl définit le nombre minimal d'expériences à mener : ici le plan fractionné à retenir doit comporter au moins 8 expériences, nous choisissons donc la table L_8 (2^7) qui répond à cette exigence. L'affectation des facteurs et éventuellement des interactions aux colonnes de la table se fait à l'aide d'un graphe linéaire associé à la table.

Autre exemple : 7 facteurs à 2 niveaux et 2 interactions retenues

$Y_{\text{calculé}}$ = Moyenne Générale + A + B + C + D + E + F + G + AB + AC
$\text{ddl}_{\text{modèle étudié}}$ = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1x1 + 1x1 = 10 ddl

La table doit donc comporter au moins 10 expériences.

Calcul des effets

Le calcul d'un effet permet de déterminer l'influence d'un facteur ou d'une interaction sur la réponse étudiée.

Effet d'un facteur

On note :
E_{A1}, l'effet du facteur A lorsqu'il est au niveau 1
Moy Géné, la moyenne générale de toutes les expériences
Moy A1, la moyenne des expériences où le facteur A est au niveau 1

Alors : E_{A1} = Moy A1 – Moy Géné

Effet d'une interaction

1ère possibilité : on calcule l'effet directement par la colonne de la table correspondant à l'interaction comme pour le calcul d'un effet de facteur à un niveau

On note :
E_{AB1}, l'effet de l'interaction AB lorsqu'elle est au niveau 1
Moy AB1, la moyenne des expériences où l'interaction AB est au niveau 1

Alors : E_{AB1} = Moy AB1 – Moy Géné

2ème possibilité : on calcule l'effet en utilisant les colonnes de la table correspondant aux facteurs de l'interaction étudiée

On note :
E_{A1B1}, l'effet de l'interaction AB lorsque les facteurs A et B sont aux niveaux 1
Moy A1B1, la moyenne des expériences où les facteurs A et B sont aux niveaux 1

Alors : EA1B1 = Moy A1B1 – Moy Géné – E_{A1} – E_{B1}

Les deux possibilités de calcul donnent les mêmes résultats numériques. Les calculs des moyennes permettront l'analyse graphique des effets des facteurs et des interactions. Les calculs des effets donneront les coefficients du modèle matriciel.

Modèle matriciel

Le modèle de la réponse est de la forme :

$Y_{\text{calculée}}$ = Moy Géné + A + B + AB

Sous une forme matricielle ce modèle s'écrira :

$Y_{\text{calculée}}$ =	Moy Géné	Moyenne Générale
	$+ [\ E_{A1}\ ;\ E_{A2}\ ]\ [A]$	Effets du facteur A
	$+ [\ E_{B1}\ ;\ E_{B2}\ ]\ [B]$	Effets du facteur B
	$+ [\ E_{A1B1}\ ;\ E_{A1B2}\ ]$ ${}^{t}[A] \qquad [B]$ $+ [\ E_{A2B1}\ ;\ E_{A2B2}\ ]$	Effets de l'interaction AB (produit des 2 matrices lignes A et B)

Il est à noter que la somme arithmétique des effets d'un facteur et d'une interaction, par colonne et ligne de la matrice, est nulle. Dans notre cas, ici :

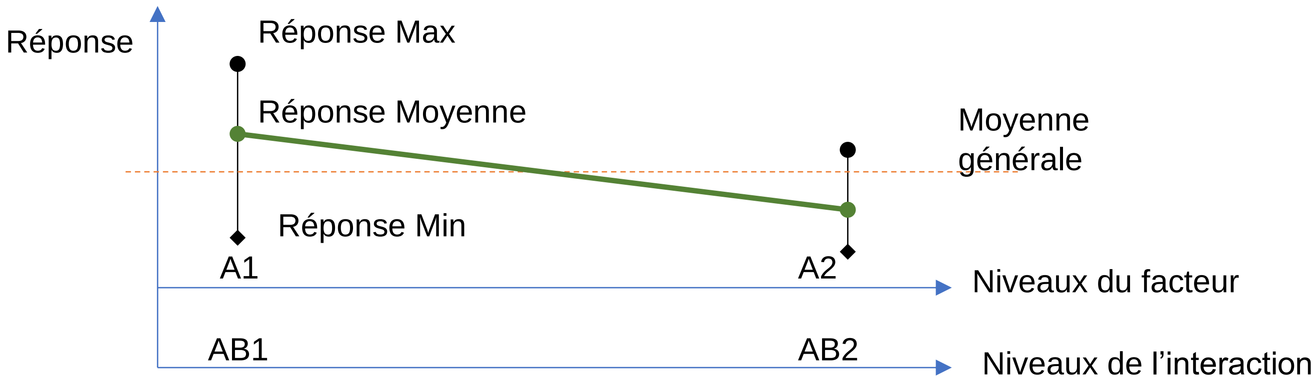
$E_{A1} + E_{A2} = E_{B1} + E_{B2} = E_{A1B1} + E_{A1B2} = E_{A2B1} + E_{A2B2} = 0$

L'analyse graphique

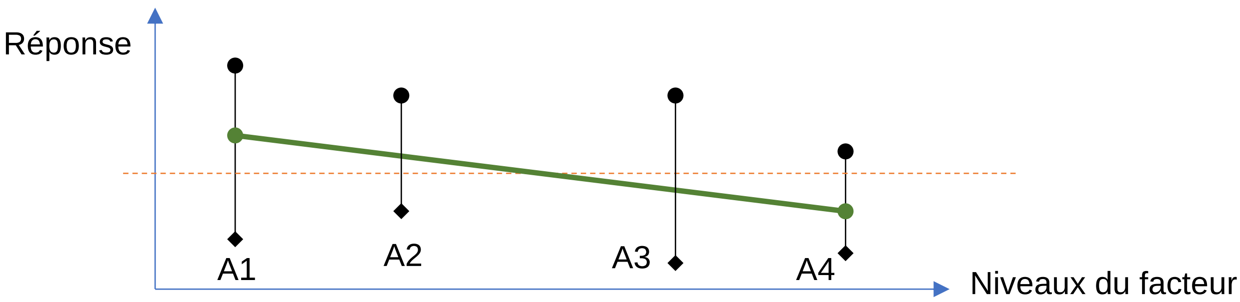
L'objectif de l'analyse graphique est de représenter graphiquement les résultats de l'étude, moyennes et dispersions des réponses.

Plus la pente de la droite qui relie les deux valeurs moyennes (cas d'un facteur à 2 niveaux) est forte devant l'étendue de résultats aux extrémités, plus le facteur ou l'interaction étudié a un effet influent sur la réponse

Le sens de variation de la droite indique si le facteur agit de manière positive ou négative sur la réponse



Remarque : on considère la réponse du facteur ou de l'interaction linéaire (la réponse est proportionnelle aux niveaux du facteur ou de l'interaction). Il est parfois important notamment lorsque l'on a une connaissance limitée du phénomène de vérifier cette linéarité qui est considérée à priori. Pour cela, soit on prend trois niveaux ou plus pour le facteur ou l'interaction mais ça complique la campagne d'essais et l'efficacité est limitée, soit on effectue une étude de linéarité de la réponse aux variations des niveaux.



Analyse de la variance

L'objectif de cette analyse est de vérifier si les effets retenus comme influents sont réellement associés au facteur ou à l'interaction considéré ou s'ils ne sont que les manifestations de la variabilité naturelle du phénomène étudié.

Cette analyse permet donc la validation des effets retenus.

Problématique : à l'extrême supposons un plan d'expériences pour lequel la réponse ne dépend d'aucun des facteurs étudiés. Le calcul des effets donnerait néanmoins des résultats numériques. L'analyse de la variance permet de déterminer à partir de quel seuil un effet peut être considéré comme statistiquement significatif.

<u>Démarche</u> : l'analyse de la variance est basée sur la comparaison entre la variance résiduelle du phénomène étudié et la variance des effets des facteurs et interactions retenus comme influents. Le test de Fisher-Snedecor permet cette comparaison pour un seuil de refus à un risque donné (risque qu'un effet soit considéré comme significatif alors qu'il ne l'est pas).

L'exemple du tableau des variances, ici pour 3 facteurs et une interaction, permet cette analyse :

Facteurs Interaction	Somme des carrés	ddl	Variances	F expérience	F théorique	Significatif ou non
A	S_A	ddl_A	V_A	V_A/V_R	U_{nA} ; U_d	Oui / Non
B	S_B	ddl_B	V_B	V_B/V_R	U_{nB} ; U_d	Oui / Non
C	S_C	ddl_C	V_C	V_C/V_R	U_{nC} ; U_d	Oui / Non
AB	S_{AB}	ddl_{AB}	V_{AB}	V_{AB}/V_R	U_{nAB} ; U_d	Oui / Non
Résidus	S_R	ddl_R	V_R			
Total	S_T	ddl_T				

Avec

N : nombre de lignes de la table d'expériences ou nombre d'essais de la campagne
nA : nombre de niveaux du facteur ou de l'interaction
E_A : effet du facteur ou de l'interaction

S_A = (N x somme (E_A^2)) / nA et S_{AB} = (N x somme (E_{AB}^2)) / nAB
S_R = somme (R^2) avec R = $Y_{\text{réponse mesurée}} - Y_{\text{réponse calculée}}$
S_T = Somme ($Y_{\text{réponse mesurée}}$ – Moy Géné)^2
$S_R = S_T - S_A - S_B - S_C - S_{AB}$

ddl_A = nA – 1 et ddl_{AB} = (nA – 1) (nB – 1)
ddl_R = N – $ddl_{\text{modèle}}$
ddl_T = N – 1

$V_A = S_A$ / nA – 1 et $V_{AB} = S_{AB}$ / (nA – 1) (nB – 1)
$V_R = S_R$ / N – $ddl_{\text{modèle}}$

U_{nA} = nA – 1 et U_{nAB} = (nA – 1) (nB – 1)
Premier ddl de la table de Snedecor, numérateur

U_d = N – $ddl_{\text{modèle}}$
Second ddl de la table de Snedecor, dénominateur

Pour un risque accepté, généralement à 5% :
S $F_{\text{expérience}} > F_{\text{théorique Snedecor}}$ alors facteur ou interaction statistiquement significatif.
Si $F_{\text{expérience}} < F_{\text{théorique Snedecor}}$ alors non significatif

Optimisation de la réponse

Il est retenu, pour le modèle matriciel après analyse, les facteurs et interactions influents sur la réponse et statistiquement significatifs.

Les coefficients du modèle permettent l'optimisation de la réponse par la recherche de l'extremum (min ou max) fixé par l'objectif de l'étude
Si par exemple les facteurs A et B et l'interaction AB sont influents et statistiquement significatifs à un risque consenti alors le modèle après analyses sera de la forme :

$Y_{\text{calculée}}$ =	Moy Géné	Moyenne Générale
	+ [E_{A1} ; E_{A2}] [A]	Effets du facteur A
	+ [E_{B1} ; E_{B2}] [B]	Effets du facteur B
	+ [E_{A1B1} ; E_{A1B2}] ^{t}[A] [B] + [E_{A2B1} ; E_{A2B2}]	Effets de l'interaction AB

Si la réponse optimale recherchée est un minimum on retiendra alors les niveaux de facteurs qui donneront la réponse minimale, par exemple : Y_{mini} pour A1 et B1

L'effet de l'interaction peut être antagoniste avec les effets séparés des facteurs et dans ce cas on retiendra la combinaison la meilleure dans la recherche de l'extremum fixé.

Exemple complet d'une étude

L'exemple traité ci-dessous est théorique

01-<u>Formaliser le problème</u>

Une équipe cherche à minimiser le dégagement de chaleur émis par un mécanisme embarqué sur un aéronef (phénomène étudié et réponse étudiée).

Il s'agit de minimiser ce dégagement de chaleur (extremum au minimum).

02-Choisir les facteurs, niveaux et interactions

L'équipe décide de retenir trois facteurs A, B et C à 2 niveaux chacun et de considérer les 3 interactions AB, AC et BC comme susceptibles d'être influents sur la réponse Y du phénomène étudié

- A : facteur qualitatif concernant deux environnement, pas ventilé A1 et ventilé A2
- B : facteur quantitatif concernant la conductivité thermique, 0.06 $W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}$ et 0.3 $W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}$.
- C : facteur quantitatif concernant l'épaisseur des matériaux, 13 mm et 24 mm

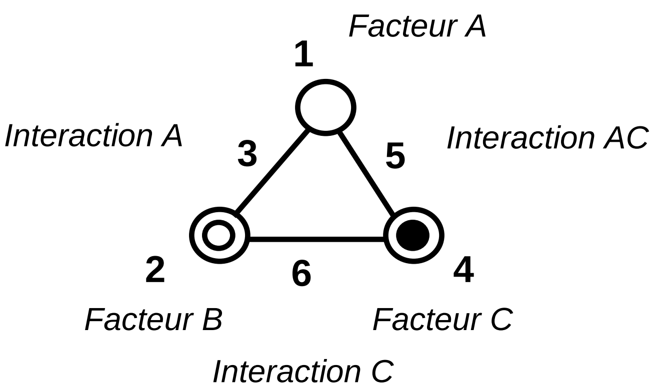
Facteurs	Niveau 1	Niveau 2
A	A1	A2
B	0.06	0.3
C	13	24

03-Construire le plan

$Y_{\text{calculé}}$ = Moyenne Générale + A + B + C + AB + AC + BC
$ddl_{\text{modèle étudié}}$ = 1 + 1 + 1 + 1 + 1x1 + 1x1 + 1x1= 7 ddl

le plan factoriel fractionné doit comporter au moins 7 expériences donc la table de Taguchi L_8 (2^7) correspond à cette combinaison.

Il s'agit maintenant d'affecter les facteurs et interactions aux colonnes de la table selon le graphe linéaire associé à la table.



Dans cet exemple théorique :

- Le facteur A est considéré comme le plus difficile à modifier
- Le facteur B est considéré comme un peu plus facile à modifier

- Le facteur C est considéré comme le plus facile à modifier

Table de Taguchi L_8 (2^7)							
Facteurs et interactions	**A**	**B**	**AB**	**C**	**AC**	**BC**	**Pas utilisé**
Colonnes	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
Expérience1	A1	B1	AB1	C1	AC1	BC1	
Expérience2	A1	B1	AB1	C2	AC2	BC2	
Expérience3	A1	B2	AB2	C1	AC1	BC2	
Expérience4	A1	B2	AB2	C2	AC2	BC1	
Expérience5	A2	B1	AB2	C1	AC2	BC1	
Expérience6	A2	B1	AB2	C2	AC1	BC2	
Expérience7	A2	B2	AB1	C1	AC2	BC2	
Expérience8	A2	B2	AB1	C2	AC1	BC1	

La table de Taguchi L_8 (2^7) est un plan d'expériences fractionné, répond-elle aux règles des degrés de liberté ddl et de l'orthogonalité ?

04-Réaliser les essais

Pour chaque ligne du plan, l'expérience est menée en réglant les niveaux des facteurs A, B et C et en mesurant le résultat de la réponse, dans notre cas théorique il s'agit d'un indice de dégagement de la chaleur (plus l'indice est élevé plus la chaleur dégagée est importante).

Table de Taguchi L_8 (2^7)							
Facteurs et interactions	**A**	**B**	**AB**	**C**	**AC**	**BC**	**Résultats de la réponse**
Expérience1	A1	0.06	AB1	13	AC1	BC1	900
Expérience2	A1	0.06	AB1	24	AC2	BC2	920
Expérience3	A1	0.3	AB2	13	AC1	BC2	2950
Expérience4	A1	0.3	AB2	24	AC2	BC1	3250
Expérience5	A2	0.06	AB2	13	AC2	BC1	680
Expérience6	A2	0.06	AB2	24	AC1	BC2	600
Expérience7	A2	0.3	AB1	13	AC2	BC2	1380
Expérience8	A2	0.3	AB1	24	AC1	BC1	1950

Sans aucune analyse que pouvez-vous dire des facteurs influents sur les résultats de la réponse ?

05-Analyser les résultats

Moyennes :

Moy Géné = 1578.75

Moy A1 = 900 +920 + 2950 + 3250 / 4 = 2005

Moy AB1 = 900 + 920 + 1380 + 1950 / 4 = 1287.5

…

Calcul des moyennes des facteurs et des interactions		
Facteurs Interactions	**Niveau 1**	**Niveau 2**
A	2005	1152.5
B	775	2382.5
C	1477.5	1680
AB	1287.5	1870
AC	1600	1557.5
BC	1695	1462.5

Effets :

E_{A1} = 2005 – 1578.75 = 426.25

E_{AB1} = 1287.5 – 1578.75 = - 291.25

Ou E_{A1B1} = (Somme Y_{A1B1} / 2) – Moy Géné – EA1 – EB1

= (900 + 920 / 2) – 1578.75 – (2005 – 1578.75) – (775 – 1578.75)

= 910 – 1578.75 – 426.25 + 803.75 = 291.25

…

Calcul des effets des facteurs et des interactions		
Facteurs Interactions	**Niveau 1**	**Niveau 2**
A	426.25	-426.25
B	- 803.75	803.75
C	-101.25	101.25
AB	-291.25	291.25
AC	21.25	-21.25
BC	116.25	-116.25

$E_{A1} + E_{A2} = E_{B1} + E_{B2} = E_{C1} + E_{C2} = E_{AB1} + E_{AB2} = E_{AC1} + E_{AC2} = E_{BC1} + E_{BC2} = 0$

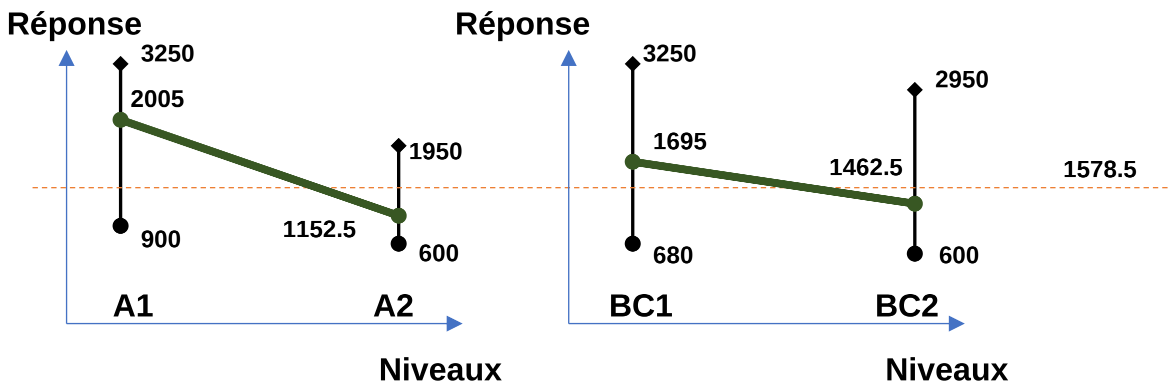
Modèle matriciel :

$Y_{\text{calculée}}$ =	Moy Géné	1578.75
Facteur A	E_{A1} ; E_{A2} [A]	426.25 ; -462.25
Facteur B	E_{B1} ; E_{B2} [B]	-803.75 ; 803.75
Facteur C	E_{C1} ; E_{C2} [C]	-101.25 ; 101.25
Facteur AB	E_{A1B1} ; E_{A1B2}	-291.25 ; 291.25

	$^{t}[A]$ [B] E_{A2B1} ; E_{A2B2}	 291.25 ; -291.25
Facteur AC	E_{A1C1} ; E_{A1C2} $^{t}[A]$ [C] E_{A2C1} ; E_{A2C2}	21.25 ; -21.25 -21.25 ; 21.25
Facteur BC	E_{B1C1} ; E_{B1C2} $^{t}[B]$ [C] E_{B2C1} ; E_{B2C2}	116.25 ; -116.25 -116.25 ; 116.25

Analyse graphique :

Facteur A Interaction BC …



L'analyse graphique donne comme influents sur la réponse Y les facteurs A et B et l'interaction AB.

Modèle matriciel après l'analyse graphique :

$Y_{\text{calculée}}$ =	Moy Géné	1578.75
Facteur A	E_{A1} ; E_{A2} [A]	426.25 ; -426.25
Facteur B	E_{B1} ; E_{B2} [B]	-803.75 ; 803.75
Facteur AB	E_{A1B1} ; E_{A1B2} $^{t}[A]$ [B] E_{A2B1} ; E_{A2B2}	-291.25 ; 291.25 291.25 ; -291.25

Analyse de la variance :

ddl_A = nA – 1 = 2-1 = 1

ddl_{AB} = (nA – 1) (nB – 1) = (2 -1) (2 -1) = 1

$ddl_R = N – ddl_{modèle} = 8 – 7 = 1$

$ddl_T = N – 1 = 8 – 1 = 7$

$S_A = (N \times somme (E_A^2)) / nA = (8 \times (426.25^2 + 426.25^2)) / 2 = 1453512.5$

$S_B = (N \times somme (E_B^2)) / nB = (8 \times (803.75^2 + 803.75^2)) / 2 = 5168112.5$

$S_{AB} = (N \times somme (EAB^2)) / nAB = (8 \times (291.25^2 + 292.25^2)) / 2 = 678612.5$

S_T = Somme ($Y_{\text{réponse mesurée}}$ – Moy Géné)^2
$= (900 – 1578.75)^2 + (920 – 1578.75)^2 + (2950 – 1578.75)^2 + (3250 – 1578.75)^2 + (680 – 1578.75)^2 + (600 – 1578.75)^2 + (1350 – 1578.75)^2 + (1950 – 1578.75)^2$
$= 7511087.5$

$S_R = S_T – S_A – S_B – S_C – S_{AB} – S_{AC} – S_{BC}$
$= 17112.5$

$V_A = S_A / nA – 1 = 1453512.5 / (2 -1) = 1453512.5$
$V_{AB} = S_{AB} / (nA – 1) (nB – 1) = 678612.5 / (2 -1) (2 -1) = 678612.5$

$F_{\text{expérience}} = V_A / V_R = 1453512.5 / 17112.5 = 84.938641$
$= V_{AB} / V_R = 678612.5 / 17112.5 = 39.655953$

$Un_A = nA – 1 = 2 – 1 = 1$
$U_{nAB} = (nA – 1) (nB – 1) = (2 – 1) (2 – 1) = 1$
$U_d = N – ddl_{\text{modèle}} = 8 – 7 = 1$

Facteurs Interaction	Somme des carrés	ddl	Variances	F expérience	F théorique	Significatif ou non
A	1453512.5	1	1453512.5	84.938641	1 ; 1	Oui / Non
B	5168112.5	1	5168112.5	302.00803	1 ; 1	Oui / Non
C	82012.5	1	82012.5	4.7925493	1 ; 1	Oui / Non
AB	678612.5	1	678612.5	39.655953	1 ; 1	Oui / Non
AC	3612.5	1	3612.5	0.2111029	1 ; 1	
BC	108112.5	1	108112.5	6.3177501	1 ; 1	
Résidus	17112.5	1	17112.5			
Total	7511087.5	7				

Table de Fisher-Snedecor et résultats finaux :

- S $F_{\text{expérience}} > F_{\text{théorique Snedecor}}$ alors facteur ou interaction statistiquement significatif pour un risque d'erreur consenti
- Si $F_{\text{expérience}} < F_{\text{théorique Snedecor}}$ alors non significatif

- $F_{\text{théorique Snedecor } 0.01}$ (1 ; 1) = 4052 (au risque de 1 % : aucun des effets n'est significatif)
- $F_{\text{théorique Snedecor } 0.05}$ (1 ; 1) = 161.4 (au risque de 5 % : seul l'effet de B est significatif)
- $F_{\text{théorique Snedecor } 0.1}$ (1 ; 1) = 39.86 (au risque de 10% : les effets de A, B sont significatifs)

Contribution des effets et interactions sur la réponse :

Contribution de l'effet du facteur A sur la réponse

7511087.5 → 100%

1453512.5 → C_A

C_A = (1453512.5 x 100) / 7511087.5 = 19.351%

Facteurs	**Somme des carrés**	**Contribution %**
A	1453512.5	19.35
B	5168112.5	68.8
C	82012.5	1.09
AB	678612.5	9.03
AC	3612.5	0.04
BC	108112.5	1.43
Résidus	17112.5	0.22
Total	7511087.5	100

06-<u>Optimiser la réponse</u>

Au risque statistique de 10% seuls les facteurs A et B influents à 19.35% et 68.80% sont retenus pour le modèle final dont l'extremum recherché est un minimum.

$Y_{\text{calculée}}$ =	Moy Géné	1578.75
Facteur A	E_{A1} ; E_{A2} [A]	426.25 ; -426.25
Facteur B	E_{B1} ; E_{B2} [B]	-803.75 ; 803.75

$Y_{\text{minimum calculé}}$= 1578.75 (Moy Géné) – 426.25 (E_{A2}) – 803.75 (E_{B1}) = 348.75

On retiendra donc l'environnement A2 (ventilé) et la conductivité thermique de 0.06 $W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}$

***Rappel* : cette étude est purement théorique**